

Les construccions geomètriques euclidianes. La papiroflèxia i les matemàtiques cartesianes¹

Josep Pla Carrera

Matemàtic i historiador

Resum

El meu renebot Xandre em va demanar si li podia explicar quina és la matemàtica que hi ha en la papiroflèxia. Li vaig respondre amb aquestes pàgines, que publica el *Nou Biaix* en dues parts: «Les construccions geomètriques euclidianes» i «La papiroflèxia i les matemàtiques cartesianes».

Abstract

My nephew-grandson asked me to explain to him the mathematics behind origami. I answered him with these pages that Nou Biaix has decided to publish in two parts: «Euclidian geometric constructions» and «Origami and Cartesian mathematics».

1. La geometria euclidiana del regle i el compàs

1.1. El regle i el compàs

Comencem pel començament. Per què el regle i el compàs?

1.1.1. L'escola de Plató

El segle IV aC, Plató (427 aC-347 aC)² —potser fora millor dir l'Escola platònica— va fixar que les úniques eines que es poden acceptar en la construcció geomètrica són el regle [R] i el compàs

1. Començat a Barcelona el 29 d'octubre de 2023.

2. Si bé el seu nom era «fill d'Aristó» Ἀριστοκλῆς, se'l coneix com a Πλάτων. Per a una biografia dels autors esmentats, vegeu [M_T, MacTutor:1994-2023].

[C] —és a dir, els *ginys* que poden concórrer en la construcció són les *rectes* i les *circumferències*.³

1.1.1a. Això, què significa Significa que els únics punts que s'admeten són els que s'obtenen tallant *dues rectes, una recta i una circumferència o dues circumferències*.

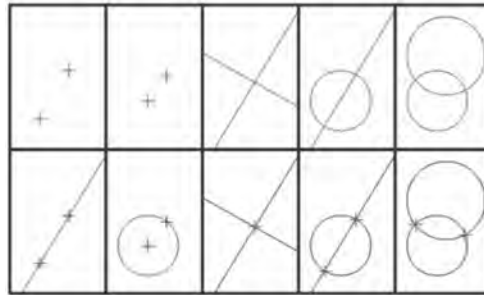


Figura 1. Construccions bàsiques amb regla i compàs.

És a dir, en cada construcció s'obté un punt nou que esdevé un punt acceptat en aquesta construcció i en les posteriors.

De retruc, ho són les rectes que passen per dos d'aquests punts i les circumferències amb el centre en un dels punts i que passen per l'altre.

En la figura 1, hi ha, de fet, dues menes de figures:

- En les dues primeres caselles superiors de l'esquerra veiem dos punts i, en les corresponents de sota, la recta —i també el segment— i la circumferència que aquests dos punts determinen.
- En les tres superiors de la dreta, hi ha dues rectes, una recta i una circumferència, i dues circumferències. Les de sota marquen els punts que aquests objectes determinen, en tallar-se.

1.1.1b. Com procedim? Per començar, necessitem almenys dos punts. S'accepta l'*existència d'un segment unitat*, és a dir, dos punts que en són els extrems: $\overset{0}{\text{I}} \text{---} \overset{1}{\text{I}}$. A partir d'ells, es generen més i més punts: $O, I, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$

Exemple 1. Volem construir un quadrat de costat OI .

Per fer-ho, a) Hem de *construir* dos punts P_3 i P_4 de manera que els segments d'extrems I i P_3 , O i P_4 , i P_3 i P_4 siguin els costats del quadrat.

b) Cal *demonstrar* que el que hem construït és el que volíem. És a dir, que el polígon $\square OIP_3P_4$ de vèrtexs O, I, P_3 i P_4 és efectivament un quadrat.

3. [Boyer:1949], nota 52, p. 27. [Pla:2016], p. 256.

Recordem la definició de quadrat:

Definició de quadrat. *Un quadrat és una figura limitada per quatre segments rectilinis iguals i perpendiculars dos a dos.*⁴ ♦⁵

Veiem els passos a), b) i c) que cal fer. La resta de passos són anàlegs.

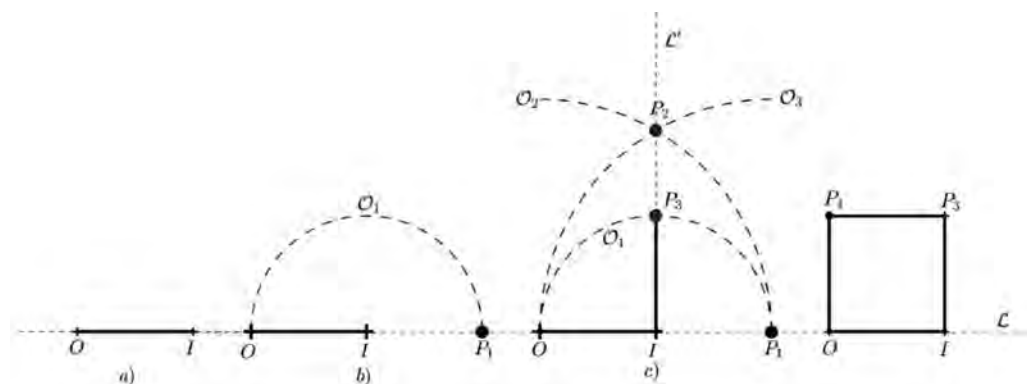


Figura 2. Construcció de quadrat de costat OI .

Pas 0) Tenim els punts O i I .

Pas a) Tirem la recta $\mathcal{L}$ que passa per O i I . [R]

El segment OI , d'extremes O i I , és el costat amb el qual volem construir el quadrat.

Pas b) Amb centre en I , fem la circumferència $\mathcal{O}_1$ que passa per O . [C]

Aquesta circumferència talla $\mathcal{L}$ pel punt P_1 , que s'ha generat de manera correcta. Per tant, hi podem treballar.

Pas c) Consta de tres subpassos:

Subpass c₁) Amb centre en O , tirem la circumferència $\mathcal{O}_2$ que passa per per P_1 . [C]

Subpass c₂) I, amb centre en P_1 , la $\mathcal{O}_3$ que passa per O . [C]

Subpass c₁ i c₂) Les circumferències $\mathcal{O}_2$ i $\mathcal{O}_3$ es tallen pel punt P_2 ,⁶ construït correctament. Per tant, hi podem treballar.⁷

Subpass c₃) Tirem la recta $\mathcal{L}'$ que passa pels punts P_2 i I . [R]

Aquesta recta talla $\mathcal{O}_1$ pel punt P_3 , que és correcte i que, per tant, podem utilitzar.

Nota 1 Hem fet la **perpendicular** a un segment donat per un dels seus extrems.

I determina el darrer costat, d'extremes P_3 i I , del quadrat buscat.



4. [Pla:2018], D1 22, p. 80.

5. Aquest símbol indica el final d'una definició.

6. Sobre l'existència d'aquest punt, vegeu les notes 269 i 387 de [Pla:2018], p. 88 i 113.

7. Fixeu-vos que, en realitat, per determinar el punt P_2 només cal el compàs.

8. [Pla:2018], E1 46, p. 147-148.

Exercici 1. Feu els passos que falten per tal d'aconseguir els quatre costats del quadrat. [*Indicació.* El costat que surt del punt O és *mutatis mutandis* com el que acabem de fer: és la perpendicular a Ol pel punt O . El quart costat és molt més simple d'obtenir un cop tenim el punt P_4 . Només cal l'ús del regle.]

1.2. Els Elements d'Euclides

El segle III aC, Euclides (Εὐκλείδης)⁹ 325 aC-265 aC) va escriure els *Elements* (Στοιχεία), una de les obres matemàtiques cabdals de tots els temps.

1.2.1. L'axiomàtica euclidiana

En el tractat euclidià es fixà l'*axiomàtica* de la geometria grega d'acord amb les indicacions platòniques i la metodologia del raonament deductiu fixada per Aristòtil (Αριστοτέλης) (384 aC-322 aC).

L'autor hi estableix, abreuçant, les *definicions* dels objectes geomètrics, les *nocions comunes* —o principis vàlids en ciència i filosofia—, i els *postulats* —allò que hem d'admetre, sense demostració, com a vertader en geometria.

En síntesi, els postulats d'Euclides els podem reduir a aquests tres:

Postulat de la recta. *Donats dos punts, existeix sempre una recta, i només una, que passa per tots dos.* És a dir, dos punts determinen una recta única

Postulat de la circumferència. *Donats dos punts, existeix sempre una circumferència, i només una, que en té un com a centre i que passa per l'altre.* És a dir, dos punts determinen una circumferència única.

Postulat de les paral·leles euclidià. *Donada una recta i un punt exterior a ella, sempre n'hi ha una altra que passa pel punt donat i és paral·lela a la donada —és a dir, que no la talla.*

La geometria que aplica aquests postulats s'anomena *geometria euclidiana*. És la que aprenem a l'escola i la que treballarem aquí.

La negació del postulat de les paral·leles comporta dues possibilitats:

Postulat el·líptic de les paral·leles. *Pel punt **no** és possible tirar cap recta paral·lela a la donada.* La geometria que aplica aquest postulat s'anomena *geometria el·líptica*.

Postulat hiperbòlic de les paral·leles. *Pel punt és possible tirar **més d'una** recta paral·lela a la donada [i fins i tot infinites].*

La geometria que aplica aquest postulat s'anomena *geometria hiperbòlica*.

I la geometria que no fa servir cap d'aquests tres postulats s'anomena *neutral*.

9. [M_T MacTutor:1994-2023]. Vegeu la nota 2 (pàgina 66). No ho tornarem a recordar.

1.2.2. Els problemes i els teoremes

Una altra qüestió important que Euclides recull als *Elements* és la distinció entre les proposicions: els *problemes* i els *teoremes*.

Un *problema* és una proposició que demana **construir** l'objecte geomètric.

Exemple de problema. *Construir un quadrat d'un costat donat.*

En un problema, com ja hem indicat abans, cal fer dues coses:

- a) De primer, *construir* l'objecte.
- b) Després, *demonstrar* que hem construït el que es demanava.

Així és com procedeix Euclides en els *Elements*. De les 465 proposicions, 98 són problemes, i la resta, teoremes.¹⁰

Un *teorema* és una proposició en la qual es demana **demonstrar** una propietat partint de la definició de l'objecte, les nocions comunes i els postulats.

Exemple de teorema. *La suma dels angles externs d'un triangle arbitrari és igual a quatre angles rectes.*¹¹

1.2.2a. Una qüestió epistemològica En el cas dels teoremes **no cal** que l'objecte que té la propietat s'hagi construït. És un objecte *ideal*.

L'exemple de teorema val per a l'heptàgon i l'enneàgon regulars (polígons regulars de 7 i 9 costats), que no es poden fer amb regla i compàs.

En el cas dels problemes, en canvi, **cal** construir l'objecte. És un objecte *real*, és a dir, **existeix**.

Euclides estableix l'existència dels polígons regulars de tres, quatre, cinc i quinze costats —diu com s'han de construir i demostra que els ha construït.

I, com que veu que és possible dimidiar un angle (2.1b, pàgina 89), també són construïbles tots els que s'obtenen doblant el nombre de costats d'un ja construït. És a dir, els de sis, vuit, deu, dotze, setze, vint, etc costats.

1.2.2b. Intervé Gauss Ens podem fer la pregunta següent:

Pregunta. *N'hi ha més, de polígons regulars construïbles amb regla i compàs?*

10. Hi ha una traducció catalana dels *Elements* d'Euclides, a [Pla:2018] i [Pla:2020]. En línia, en català, a https://web.archive.org/web/20130901142522/http://euclides.org/menu/elements_cat/indexeuclides.htm#Llibre%20I. La informació sobre els teoremes i els problemes la trobareu a [Pla:2018], §1.3, taules 1.2 i 1.3, p. 12-13.

11. Es basa en el teorema euclidià: «La suma dels angles interiors d'un triangle és igual a dos angles rectes». [Pla:2018], p. 12-13. En les geometries no euclidianes, la suma dels angles és més petita (hiperbòlica) o més gran (el·líptica) que dos angles rectes.

Passarien molts segles abans que un jove de divuit anys, Gauss, establís el seu teorema:

El polígon regular de disset costats és construïble amb regla i compàs.

I en la seva obra *Disquisitiones arithmeticae* (1801) demostra **que tots** els polígons regulars són construïbles amb regla i compàs.¹²

1.3. Variacions del regla i el compàs

Un cop hem acceptat que les eines geomètriques acceptables són el regla i el compàs, ens podem plantejar algunes preguntes:

Pregunta. *Podem fer les mateixes construccions geomètriques:*

1. *amb un compàs amb memòria que amb un sense memòria, i el regla?*
2. *amb un compàs rovellat que amb un de no rovellat, i el regla?*
3. *només amb un compàs?*
4. *només amb un regla?*

1.3.1. El regla i el compàs sense memòria

Definicions de compàs amb i sense memòria Un compàs té memòria si, quan aixequem un dels dos extrems del paper, no es tanca: recorda la darrera distància entre els dos punts. En canvi, no té memòria si, quan un dels dos extrems deixa de tocar el paper, es col·lapsa com si tingués una molla. ♦

Teorema. *Ambdós compassos són equivalents.*

*És a dir, amb l'ajut del regla, tant l'un com l'altre permeten fer les mateixes construccions.*¹³

Això és conseqüència de la proposició 2 del llibre primer dels *Elements*.

Proposició 2. *És possible transportar un segment donat amb un extrem en un punt també donat.*

Aquesta proposició s'estableix immediatament basant-se en la primera.¹⁴

Proposició 1. *És possible construir un triangle equilàter de costat donat.*

12. *Disquisitiones arithmeticae*. [Gauss:1801]. És un text complex, la comprensió del qual depèn d'uns bons coneixements previs. La secció I, que recull molts dels resultats d'aritmètica precedents, és molt clara i entenedora, i la seva lectura molt aconsellable. Disposem de la traducció catalana de G. Pascual. En aquest text, Carl Freidrich Gauss (1777-1855) estableix que el nombre N de costats d'un polígon construïble amb regla i compàs és de la forma $N := 2^m F_1 \cdots F_r$, on $m \geq 0$ i els F_k són primers, diferents, i de la forma $F_k := 2^{2^k} + 1$, amb $k \geq 0$. Aquests nombres, que es coneixen amb el nom de *nombres de Fermat*, els va introduir Pierre de Fermat (1607-1665) l'any 1640. Va conjecturar que tots ells eren primers, però l'any 1740 Leonhard Euler (1707-1783) va demostrar que F_5 és compost. Actualment, no sabem si per a $m > 5$, n'hi algun que sigui primer. La conjectura ara és que, per a $m \geq 5$, tots els F_m són compostos.

13. És evident que el compàs amb memòria té, en principi, més possibilitats que l'altre.

14. Cap de les dues depèn del postulat de les paral·leles. Són proposicions neutrals.

Euclides fa les dues construccions —la de la proposició 1 i la de la 2— amb un compàs sense memòria.¹⁵

1.3.1a. Transport d'un segment a un punt D'entrada, fixem-nos en el problema que proposa la proposició 2.

Problema. *Volem transportar un segment donat AB amb un extrem en un punt C també donat (figura 3).*

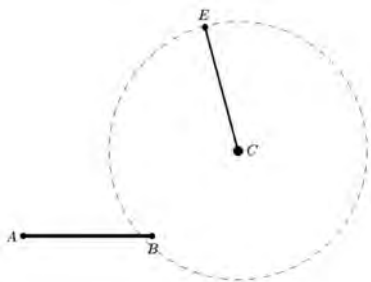


Figura 3. El transport d'un segment amb un compàs amb memòria.

1.3.1a₁. Amb el compàs amb memòria Si tenim un compàs amb memòria i volem portar el segment AB al punt C (figura 3), no tenim cap problema.

Construcció

- Punxem una punta en el punt A del compàs i l'obrim fins que l'altra cau damunt de B .
- Si l'aixequem, es manté obert en aquesta posició perquè té memòria.
- El portem al punt C . És a dir, punxem en el punt C i l'altra punta marca un punt E [en tota una circumferència de possibilitats].
- El segment CE serà igual al AB [ja que C té memòria]. ♠

La dificultat es presenta quan volem resoldre aquesta qüestió amb un compàs que no té memòria.

1.3.1a₂. Amb el compàs sense memòria La construcció és un pel més complicada. Vegem-ne els passos.¹⁶

Construcció

Pas 1. Unim un extrem del segment donat AB —per exemple el B — amb el punt C al qual volem portar AB (figura 4). [R]

Pas 2. Construïm el triangle equilàter de costat BC , $\triangle BGC$. [Com veurem, ho podem fer, per la proposició 1, amb un compàs sense memòria.]

15. Com que el compàs d'Euclides no té memòria, necessita establir la proposició 2.

16. [Pla:2018], p. 89-90.

Pas 4. Si d'iguals traiem iguals, el que resta és igual al que resta.¹⁹

Pas 5. Per tant, els segments CE i BD són iguals.

Pas 6. Però dues coses iguals a una tercera són iguals entre si.²⁰

Tenim, doncs, que $AB = BD$ i $CE = BD$, i, per tant, $CE = AB$.



Proposició I. Ha quedat pendent veure que, amb un compàs desmemoriat, *podem fer un triangle equilàter de costat donat AB* (figura 5).

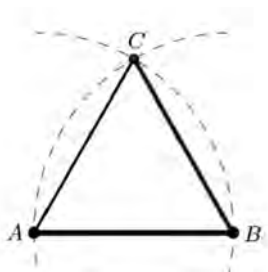


Figura 5. La proposició I.

Construcció

Pas 1 i 2. Amb centres en A i en B i radis AB i BA , tirem sengles circumferències. [C]

Es tallen pel punt C .²¹

Pas 3. Unim C amb A i amb B . [R]

El triangle $\triangle ACB$ és equilàter.



Com sabem que és equilàter? La resposta és fàcil.

Demostració

Per la definició de circumferència, $AC = AB$ i $BC = BA$, amb $AB = BA$ [és el mateix segment] i Nc 1 [nota 20].

És a dir, $AC = BC = AB$. El triangle és, doncs, equilàter.



Corol·lari. És possible dividir el segment AB .

Construcció

La recta CD (figura 5) dimidia el segment AB .



19. És un principi de raonament acceptat per Euclides: Nc 3. [Pla:2018], p. 85.

20. Pas 6 de la demostració anterior. [Pla:2018], Nc 1, p. 85.

21. Nota 6 (pàgina 68).

Exercici 2. Demostreu-ho.²²

Què passaria, però, si el compàs estigués rovellat i només admetés una obertura fix. És a dir, i si només admetia un radi?

1.3.2. El regle i el compàs rovellat

El segle x , el matemàtic i astrònom iraní Muhàmmad Abu-l-Wafà, conegut com Abu-l-Wafà, 940—~998) va escriure un obra força extensa en la qual va incloure un capítol *Sobre les parts de la geometria que podem fer amb un compàs rovellat*²³ en què donava resposta afirmativa a la pregunta:

Pregunta. *És possible fer les mateixes construccions amb un compàs rovellat i un regle?*

Curiosament, aquest problema fou tractat i estudiat també per altres matemàtics.²⁴ Al segle xix , el matemàtic suís Jakob Steiner (1796-1863) va publicar un llibret de geometria, *Les construccions geomètriques que podem fer amb un regle i un sol cercle*,²⁵ donant resposta a un suggeriment del matemàtic francès Jean-Victor Poncelet 1788-1867).

El problema d'Abu-l-Wafà es pot complicar una mica més. En lloc de disposar d'un compàs rovellat que permet fer circumferències d'un radi fix amb centres diversos, podem fer el mateix disposant d'una única circumferència, col·locada en un centre fix i inamovible però conegut?²⁶

1.3.2a. Tres construccions possibles²⁷**1.3.2a₁. La perpendicular a un segment per un extrem seu**

Problema 1. *Volem tirar una perpendicular per un extrem d'un segment donat AB.*

Analitzem dos casos:

- 1) Quan el compàs no té memòria i, de retruc, quan en té.
- 2) Quan el compàs està rovellat (figures 7 i 8).

22. Com hem vist, en les construccions amb el compàs sense memòria, en cada actuació, un cop fixat el centre i el punt pel qual passa la circumferència el compàs no s'aixeca. Ara bé, en actuacions diferents el compàs pot adoptar amplades —radis— diferents, que són determinades pel centre i el punt donats.

23. *Kitāb fi mā yahtāj ilayh al-ṣānī' min al-a'māl al-handasiyya*. Vegeu, en línia, <https://shs.hal.science/halshs-00645624>, que permet descarregar el document en pdf.

24. En línia a <https://shs.hal.science/halshs-00645624>, que permet descarregar el document en pdf.

25. *Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises*. En línia a <https://books.google.es/books?id=kdl3AAAAMAAJ>.

26. [Martin:1998], capítol 6, p. 97-105. O bé, en línia: https://en.wikipedia.org/wiki/Poncelet%E2%80%93Steiner_theorem.

27. [Berggren:1986], p. 92-96. Mostra cinc construccions.

Exercici 3. Proveu que tot el que es pot fer amb un compàs sense memòria es pot fer amb un que sí que en té.

Cas 1. El compàs no té memòria o en té, és a dir, és lliure. Com hem indicat a la nota 2 (pàgina 66), això ho hem fet amb un compàs sense memòria. Pel que fa al compàs lliure, vegeu l'exercici 3.

Cas 2. El compàs està rovellat. Només admet una obertura (figures 6 i 7).

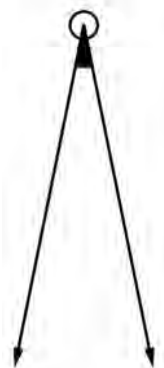


Figura 6. Compàs rovellat.

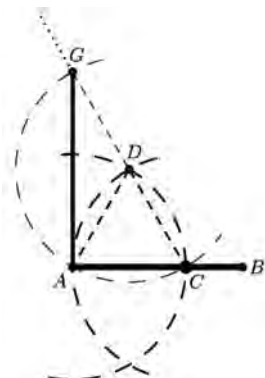


Figura 7. Ús del compàs rovellat.

Construcció

Pas 1. Tirem una circumferència que determina un punt C del segment AB [o de la seva prolongació]. [Compàs rovellat amb centre en A]

Pas 2. Tirem una circumferència que passa per A . [Compàs rovellat amb centre en C]

Es tallen pel punt D .

Pas 3. Tirem una circumferència que passa per A . [Compàs rovellat amb centre en D]

Pas 4. Tirem la recta que passa per C i D . [Regle]

Tallem la circumferència del pas 3 pel punt G .

Pas 5. Unim G i A . [Regle]

El segment GA és perpendicular al AB pel punt A , com volíem (figura 7). ♣

Exercici 4. a) Proveu que, en tots dos casos, hem aconseguit el que volíem, és a dir, el segment perpendicular GA . [Indicació. Els dos angles que el segment GA determina en la recta AB són iguals, segons la definició d'Euclides].²⁸

b) Val també la demostració, si el punt C cau en la prolongació del segment AB ?

c) Amb aquesta construcció, podem determinar el punt mitjà M de AB .

1.3.2a₂. Podem dimidiar un segment²⁹

Considerem un segment AB .

Problema. Ens proposem dimidiar-lo fent servir un compàs rovellat com el de la figura 8 (pàgina 77).

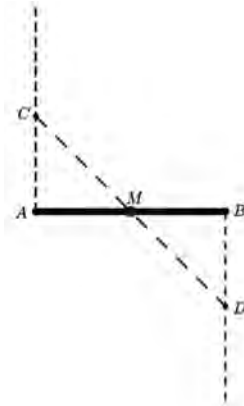


Figura 8. Dimiduem un segment amb un compàs rovellat.

Construcció

Pas 1. Pels punts A i B , aixequem les perpendiculars (figura 9). [1.3.2a₁]

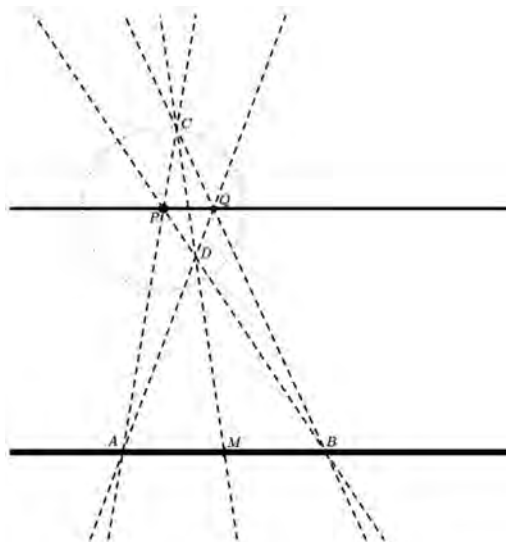


Figura 9. Recta paral·lela per un punt extern amb compàs rovellat.

Pas 2. Amb centre en els punts A i B , tirem les circumferències (No les hem dibuixat). [C rovellat]

29. En el corollari de la pàgina 74, hem vist que ho podem fer amb un compàs lliure.

Tallem les perpendiculars pels punts A i B per C i D , respectivament.

Pas 3. Unim els punts C i D . [Regle]

Tallem el segment AB pel punt M .

Aquest és el punt buscat.



Exercici 5. Proveu-ne la veracitat.

1.3.2a₃. La paral·lela a una recta per un punt exterior a ella.

Acabem aquest paràgraf *construint la recta paral·lela a una recta que passa per dos punts A i B per un punt exterior P a ella.*

Ho farem només amb un compàs rovellat.³⁰

Tenim una recta que passa pel punt A i B i un punt P exterior a ella.

Volem tirar una recta paral·lela a la recta AB pel punt P (figura 10).

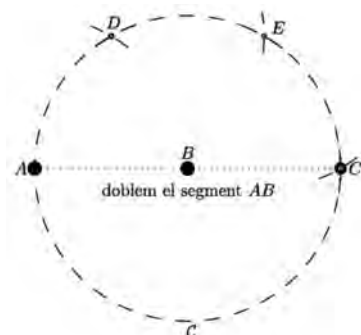


Figura 10. Doblar un segment.

Construcció

Pas 1. Unim els punts de la recta AB amb el punt P . [R]

Pas 2. Triem un punt C de la recta AP .

[C rovellat amb centre en P]

Pas 3 i 4. Tirem les rectes BC i la que passa pel punt C i el punt mitjà M de AB .

[R i exercici 4c]

Aquesta segona talla la recta BP pel punt D .

Pas 5. Tirem la recta AD . [R]

Talla la BC pel punt Q .

30. [Pla:2018], El 31, p. 128.

Pas 6. Tirem la recta PQ . [R]

És la recta paral·lela buscada.



Exercici 6. Proveu que la recta PQ és paral·lela a la AB . [Indicació. Apliqueu la definició de recta paral·lela.³¹]

Nota 2. Segons el geòmetra Francesco Severi (1879-1961), n'hi ha prou amb un arc de circumferència de centre conegut i el regle.

1.4. El compàs sol [sense memòria]

El segle XVII, el matemàtic danès Georg Mohr (1640-1697) va escriure *Euclides danicus* (Amsterdam, 1672), un text en què demostrava que totes les construccions dels *Elements* d'Euclides que es poden fer amb regle i compàs, també es poden fer només amb compàs. Malauradament, aquest petit opuscle va passar desapercebut fins al segle XIX quan fou redescobert pel matemàtic italià Lorenzo Mascheroni (1750-1800) que el va publicar en l'obra *Geometria del Compasso* (Pavia, 1797). Per aquesta raó, el resultat es coneix com el *teorema de Mohr-Mascheroni*.

En aquesta construcció tots els punts, que en les altres construccions s'obtenien tallant dues rectes o una recta i una circumferència, s'han d'obtenir tallant dues circumferències, perquè, en no disposar de regle, no podem tirar rectes.³²

Per tal de copsar, com en els casos anteriors, com funciona aquesta tècnica presentem algunes construccions.

D'entrada, cal que parem esment que ara un segment queda determinat pels seus extrems. El segment no hi és perquè no tenim regle.³³

1.4.1. La duplicació d'un segment donat

Problema. Donats els punts A i B —de fet, el segment AB —, volem determinar un segment AC exactament igual al doble de AB .³⁴

Tenim dos punts A i B .

Utilitzant només el compàs, volem determinar un punt C de manera que (el A i C sigui el doble de(l) A i B .

31. [Pla:2018], D11, p. 78.

32. En podem veure una introducció senzilla a [Courant i Robbins:1941], p. 154-158, i completa a [Martin:1998], p. 53-68.

33. Nosaltres, però, dibuixarem un línia molt subtil de punts que, de fet, no hi és, perquè ajuda a la imaginació basada en el costum. Els punts donats els representem amb ● grossos; els punts que ens disposem a construir amb ○, petits, i el que volem trobar perquè determina el segment que busquem amb un ○ més gran.

34. Amb compàs sol, només coneixem els extrems A i B del segment, que designarem AB , i recordem que els altres punts del segment, si no s'han construït amb compàs sol, no hi són.

Exercici 7. a) Vegeu la figura 10 i proveu que [el segment] A i C fa el doble que [el] A i B . [Indicació. És fàcil. Cal fer els vèrtexs de mig hexàgon regular inscrit en el cercle de centre B que passa per A [o a l'inrevés] i considerar C .]

b) Proveu que, si podem fer el segment $AC = 2AB = AB + AB$, també podem fer el $AD = AB + \overset{n)}{\dots} + AB$, on n és un nombre natural.

1.4.2. El punt simètric d'un punt respecte d'un segment donat

Problema. Donats un segment d'extremes A i B i un punt arbitrari P , volem determinar el punt Q , simètric del punt P respecte de la recta AB .³⁵

Construcció

Pas 1 i 2. Amb centres A i B , tirem les circumferències que passen per P . [C]

Es tallen en Q , el simètric de P respecte de AB .

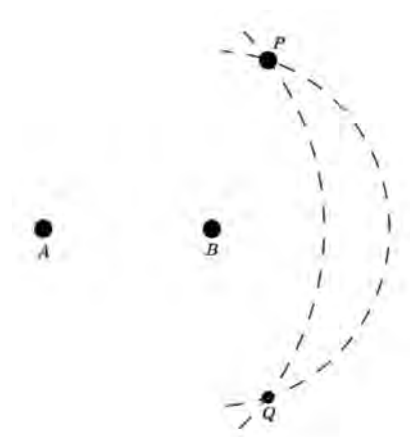


Figura 11. Simètric d'un punt P respecte d'una recta AB .

Exercici 8. Proveu-ho.

1.4.3. El punt mitjà d'un segment

Problema. Volem determinar el punt mitjà M del segment d'extremes A i B .

- a) Si disposem de regla i compàs, és un problema que es resol immediatament. b) Si no disposem de regla, les coses es compliquen, perquè no podem tirar els segments d'extremes A i B , i C i D .

35. La figura 5 (pàgina 74) suggereix la manera de fer-ho. Per anar-nos-hi acostumant, en certes ocasions no dibuixarem els segments rectilinis ja que no tenim regla.

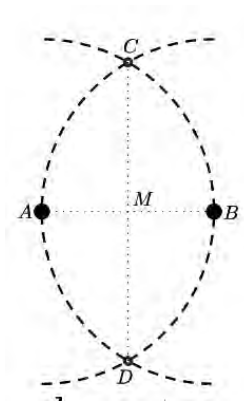
Construcció

Pas 1 i 2. Considerem les circumferències de centres A i B que passen per B i per A .

Es tallen pels punts C i D .

Pas 3 i 4. Tirem els segments AB i CD [R].

Es tallen pel punt M , que és el punt que busquem. ♣



Pas 1. Determinem un punt C que faci que el segment d'extremes A i C sigui el doble del d'extremes A i B . [§1.4.1]

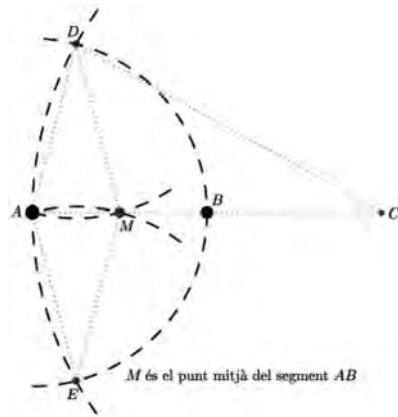
Pas 2 i 3. Amb centres A i C , tirem les circumferències que passen per B i A , respectivament. [C]

Es tallen pels punts D i E .

Pas 4. Amb centres D i E , tirem les circumferències que passen per A . [C]

Es tallen pels punts A i M .

El punt M és el punt buscat. ♣



Exercici 9. Proveu la validesa de les dues construccions. [Indicació. La de l'esquerra és fàcil. Per a la de la dreta, apliqueu la semblança dels triangles isòsceles $\triangle ADC$ i $\triangle AMC$, i obtindreu que $\frac{1}{2} = \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD}$ i, de retruc, $AM = \frac{1}{2} AD$.]

1.4.4. El punt mitjà d'un arc de circumferència donat

Problema. Donat un arc de circumferència $\widehat{AB}$ d'extremes A i B i centre O , volem dimidiar-lo, és a dir, volem trobar un punt mitjà M de l'arc $\widehat{AB}$.

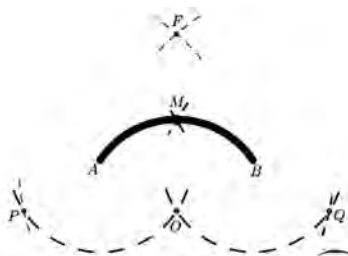


Figura 12. Punt mitjà d'un arc $\widehat{AB}$.

Construcció

Passos 1 i 2. Amb centres A i B , tirem les circumferències que passen per O . [C]

Es tallen en el punt O .

Passos 3 i 4. Tirem les circumferències de centres A i B que passen per B i A . [C]

Es tallen amb les anteriors per P i Q .

Passos 5 i 6. I, amb centres P i Q , les que passen per Q i P . [C]

Es tallen pel punt F , òbviament.

Pas 7. El punt mitjà M del segment FO és el segment buscat. [§1.4.2]

♣³⁶

Exercici 9. Proveu-ho.

1.4.5. La suma i la resta de dos segments amb un vèrtex comú

Problema. Donats els segments AO i OB , volem aconseguir els punts C i D de manera que $AC = AO + OB$ i $AD = AO - OB$ [figura 14a)].³⁷

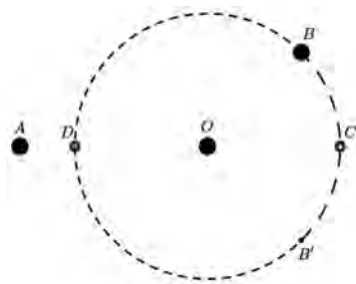


Figura 13. La suma i la resta de dos segments.

Construcció

Pas 1. Amb centre en O , tirem la circumferència de radi OB . [Compàs]

Pas 2. Considerem el simètric B' de B respecte de la recta AO . [§1.4.2, pàgina 80]

Pas 3. Els punts mitjans C i D dels arcs $\widehat{BCB'}$ i $\widehat{BDB'}$ [§1.4.4, pàgina 81] són els punts buscats. ♣

Exercici 10. Proveu que:

- El punt B' es troba damunt la circumferència de centre O i que passa per B .
- Efectivament, $AC = AO + OB$, i $AD = AO - OB$.

36. Aquestes quatre operacions, que poden semblar molt simples, són d'un gran utilitat.

37. És elemental, ja que, amb el regle, podem dibuixar la recta AO . Amb centre en O i radi OA fem la circumferència que talla AO pels punts C i D que estan evidentment alineats.

1.4.6. El trasllat d'un segment a un punt

Un fet molt important és que el compàs sense memòria té memòria perquè podem traslladar un segment donat AB a un punt donat C .

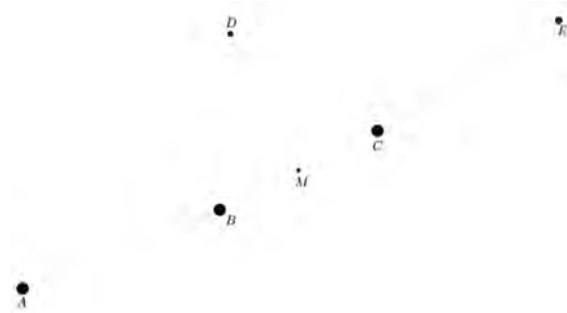


Figura 14. Traslladem AB al punt C .

Construcció

Pas 1. Fem el triangle equilàter de costat AC , és a dir, el punt D . [C sense memòria]

Pas 2. Considerem el punt mitjà M del segment AC . [§1.4.3, pàgina 80]

Pas 3. I el punt simètric E de A respecte de DM [§1.4.2, pàgina 80]

El segment CE té la longitud de AB i un extrem en el punt C , donats. ♣

Veiem ara un resultat que depèn del fet que el compàs té memòria.

1.4.7. La quarta proporcional de tres segments

Problema. Volem determinar la quarta proporcional de AB , CD i EF .

Construcció

Pas 1. Per un punt arbitrari O , tirem les circumferències de radis CD i AB [figura 15]. [C amb memòria]

Pas 2. Per un punt P de la gran [de radi CD], tirem una circumferència de radi EF . [C amb memòria]

Es tallen pel punt Q .

Pas 3. Siguin M i N els punts que determinen les diferències OM i ON dels dos radis. [§1.4.5, pàgina 82]

El segment MN és la quarta proporcional dels segments donats.³⁸

♣³⁹

38. Quina elegància!

39. En aquest cas, $\frac{CD}{AB} = \frac{PQ}{MN}$. Anàlogament, es farien els altres casos possibles.

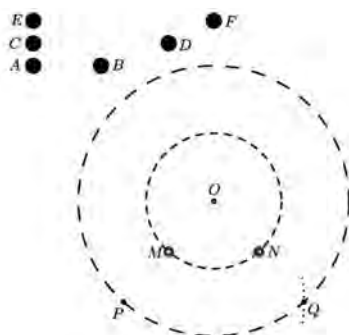


Figura 15. La quarta proporcional.

Exercici 11. Proveu la validesa de la construcció per obtenir allò que volem.

1.4.8. La mitjana proporcional de dos segments

Un altre problema geomètric és el següent:

Problema. Volem dividir un segment donat en dues parts de manera que el rectangle de costats les parts sigui equivalent a la d'un quadrat donat.⁴⁰

Donats el quadrat $\square PQ$ i un segment ED , volem trobar un punt A de ED que determini un rectangle de costats EA i AD equivalent en àrea a $\square PQ$.

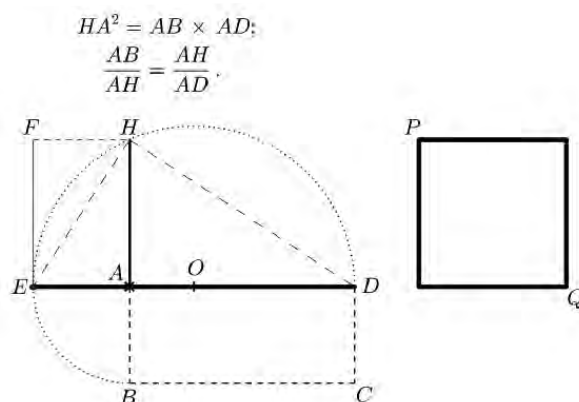


Figura 16. La mitjana proporcional.

Construcció

Pas 1. Dimiduem el segment donat ED pel punt O [§1.4.3, pàgina 80].

40. Cal que el costat del quadrat sigui més petit que la meitat del segment donat.

Pas 2. Per ell, tirem mitja circumferència de radi OE [C].

Passos 3 i 4. Pel punt E , tirem la perpendicular EF a ED de longitud igual al costat del quadrat [§1.3.2a₁, pàgina 75 i C].

Passos 5 i 6. Pel punt F , tirem la perpendicular a EF i considerem el punt H pel qual talla la semicircumferència del pas 2,⁴¹ i, pel punt H , al segment ED , i considerem el punt A pel qual talla ED .

El punt A és el punt buscat.⁴²

♣⁴³

1.4.9. Amb un compàs sol podem fer el mateix que amb el regle i el compàs

Ara podem resoldre la qüestió primordial:

- Com podem determinar els punts pels quals es tallen una recta i una circumferència?
- Com podem determinar el punt pel qual es tallen dues rectes?

1.4.9a. Els punts de tall d'una recta i una circumferència

Problema. Donada una circumferència de centre O i radi r i una recta que passa pels punts A i B , volem trobar els punts de tall P i Q .

Construcció És realment fàcil [figura 17a].

Pas 1. Sigui M el punt simètric de O respecte de AB . [§1.4.2, pàgina 80]⁴⁴

Pas 2. Amb centre en el punt M i radi r , tirem una circumferència. [C amb memòria]

Es tallen pels punts P i Q , que són els punts que buscàvem.

♣

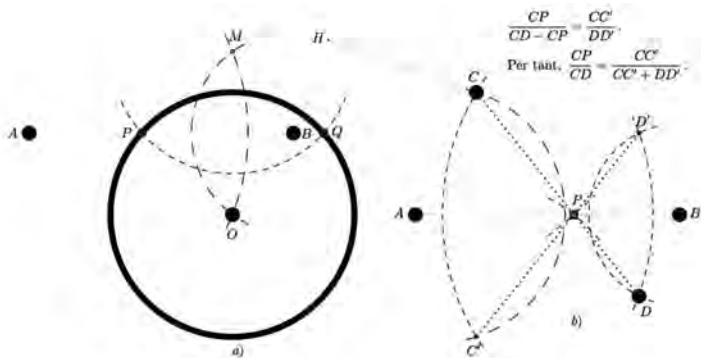


Figura 17. Els punts de tall d'una circumferència de centre donat i una recta, i de dues rectes.

41. Tenim un diorisma. Cal que el costat del quadrat sigui més petit o igual que la meitat del segment ED donat.

42. Quina elegància!

43. De fet, hem determinat la mitjana HA dels segments EA i AD , és a dir, el rectangle de costats EA i ED equival al quadrat donat.

44. Hem refet el dibuix que el determina. Podríem, doncs, haver suprimit l'ítem 1.4.2 (pàgina 80).

Exercici 12. Proveu la validesa de la construcció per obtenir allò que volem.

1.4.9b. El punt de tall de dues rectes

Problema. Donades dues rectes que passen pels punts A i B , i C i D , volem trobar el punt P pel qual es tallen.

Aquest problema, força més delicat, és adequat per aplicar el mètode de l'anàlisi platònica.

Suposem-lo resolt, i sigui P el punt que el resol.

Què se n'extreu d'això [figura 17b]?

Anàlisi

D'entrada, observem que les rectes que passen per C i P , i per D i P , ho fan pels simètrics D' i C' de D i C , respecte de la recta d'extremes A i B .⁴⁵

Ara, tal com hi ha escrit a la part de dalt de la figura [figura 17b], hem de determinar un segment CP que sigui la quarta proporcional dels segments CC' , DD' i $CC' + DD'$.

Per tant,

Construcció

Pas 1. Considerem els punts C' i D' simètrics dels C i D respecte de la recta que passa pels punts A i B . [1.4.2, pàgina 80]

Pas 2. Determinem el segment que equival a la suma dels segments CC' i DD' . [§1.4.5, pàgina 82]

Pas 3. Determinem el segment CH que equival a la quarta proporcional de CC' , DD' i el segment suma obtingut al pas 2. [§1.4.7, pàgina 83]

Pas 4. Fem les circumferències de centres C i C' i radi CH . [C amb memòria]

Es tallen pel punt P que busquem.



Exercici 13. Proveu la validesa de la construcció per obtenir allò que volem.

1.4.10. El centre d'una circumferència donada com a simple figura

En algunes ocasions, hem suposat que utilitzàvem una circumferència de la qual en coneixíem el centre O .⁴⁶

45. Malgrat que no tenim regla, hem dibuixat les rectes per ajudar a la imaginació.

46. Si coneixem el centre, el radi no cal conèixer-lo, si coneixem el centre. Només cal agafar un punt arbitrari P de la circumferència. Aleshores, el segment d'extremes O i P és el radi.

Ara ens preguntem si és possible evitar aquesta limitació.

Problema Volem determinar el centre de la figura d'una circumferència donada.

Construcció

És realment fàcil [figura 18].

Considerem dos punts arbitraris A i B de C .

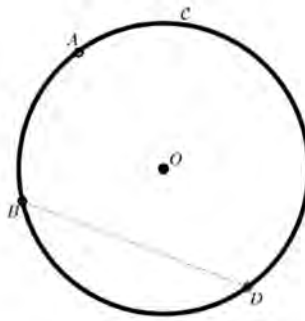


Figura 18. El centre d'una circumferència.

Pas 1. Per B , per exemple, tirem la perpendicular al segment d'extrems A i B . [Nota 1, pàgina 68]

Talla la circumferència C pel punt D . [§1.4.6a, pàgina 83]

Pas 2. Cerquem el punt mitjà O del segment d'extrems A i D . [§1.4.3b, pàgina 80]



Nota 3. En la figura de la dreta i en l'exercici 9 de la pàgina 82, hem vist que la semblança dels triangles $\triangle ADC$ i $\triangle AMC$ permet establir $\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD}$ i, de retop, $AD^2 = AC \times AM$.

Això ens porta a establir un concepte geomètric nou: la *inversió d'un punt respecte d'una circumferència*, que, de retop, permet també determinar el centre d'una circumferència.⁴⁷

1.5. El regle sol

Un cop esbrinada la potència de la circumferència sola, sembla natural que els geòmetres es preguntessin quina és la del regle sol. La resposta és:

*Només amb un regle no podem fer tot allò que es pot fer amb regle i compàs.
De fet, no és possible construir la mitjana proporcional de dos segments.*

Aquesta qüestió se la va plantejar Steiner, motivat pel resultat de Mascheroni. Va ser, precisament, quan intentava resoldre aquesta qüestió que es va adonar que, si disposava d'una

47. Nosaltres ometem aquesta nova aportació. Tanmateix, el lector interessat pot consultar qüestions relacionades amb la inversió a [Courant i Robbins:1941], p. 154-155.

circumferència —de fet, n'hi ha prou amb un arc de circumferència—,⁴⁸ podia fer el mateix que amb el regle i el compàs.⁴⁹ En va proporcionar una solució geomètrica.⁵⁰

Martin, en canvi, proporciona una presentació basada en l'ús dels nombres, un objecte que no havia aparegut fins ara i del qual en parlarem més endavant a §4 (pàgina 92).⁵¹

En tot el que hem fet nosaltres fins aquí, només hem necessitat la geometria, seguint la mentalitat dels *Elements* d'Euclides. No ens han fet falta els nombres per a res.

2. Els tres problemes clàssics

Ara bé, els grecs es van plantejar, *per generalització*, tres problemes geomètrics que es coneixen com els *tres problemes clàssics*.

2.1. Preàmbul. La duplicació del quadrat i la dimidiació de l'angle

2.1a. Problema. Amb regle i compàs, podem doblar un quadrat.

És a dir, donat un segment AB , amb regle i compàs en podem fer un altre AC el quadrat del qual equival al doble del de costat AB (figura 18a).

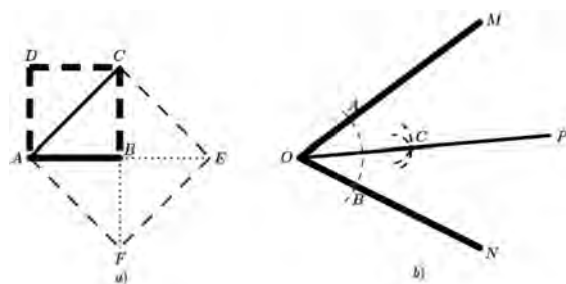


Figura 19. Duplicar el quadrat i dimidir l'angle.

Construcció

Pas 1. Fem el quadrat de costat AB , $\square ABCD$ [R i C, §1.3.2a₁, pàgina 75]

Pas 2. Unim els vèrtexs A i C .

[R]



Exercici 18. El quadrat $\square ACEF$, de costat AC , és el doble del $\square ABCD$ de costat CD . [Indicació. Per descomposició tangram.]

48. Nota, pàgina 79.

49. Podem veure una síntesi del treball de Steiner en la secció VIII del capítol 4 de [Courant i Robbins:1941], p. 209-210.

50. [Courant i Robbins:1941], p. 209-210, recorre a la geometria projectiva.

51. [Martin:1998], capítol IV, p. 69-82.

2.1b Problema *Amb regla i compàs, podem dimidiar un angle.*

És a dir, donat l'angle $\widehat{MON}$, podem determinar el punt C que fa que la recta que l'uneix amb O determini dos angles iguals $\widehat{MOC}$ i $\widehat{CON}$ (figura 18b).

Construcció

Pas 1. Amb centre en el vèrtex O de l'angle i radi arbitrari, tirem un arc de circumferència. [C]

Talla els costats de l'angle pels punts A i B .

Pas 2 i 3. Amb centre en els punts de tall A i B , tirem els arcs de circumferència que passen per l'altre punt. [C]

Es tallen pel punt C .

Pas 4. Tirem la recta que uneix els punts O i C . [R]

Aquesta recta *bisectriu* dimidia l'angle $\widehat{MON}$; és a dir, $\widehat{MOC} = \widehat{CON}$.



2.2. Els polígons regulars construïbles amb regla i compàs

No és un problema clàssic grec i ja n'hem parlat a §1.2.2a i 1.2.2b (pàgina 70).

2.3. La quadratura del cercle

En els *Elements* d'Euclides s'estableix que tota figura poligonal és *quadrable*. És a dir, es pot fer un quadrat de la mateixa superfície que la figura poligonal.

Tot es basa en tres fets:

- Dos triangles que tenen les bases i les altures iguals, encara que tinguin una forma diferent, tenen la mateixa superfície.
- Tot triangle equival en superfície a un rectangle construïble a partir d'ell amb R i C .
- Tot rectangle és quadrable, i el quadrat es pot construir amb R i C .



És natural, doncs, que els geòmetres grecs es preguntessin: *Hi ha figures limitades per arcs de circumferència, construïbles amb regla i compàs i quadrables? I el cercle, ho és?* Hipòcrates de Quios (470 aC-410 aC) va proporcionar tres *lúnules* que complien les dues condicions.⁵²

Aquest problema que, *geomètricament*, sembla **anàleg** als altres és de naturalesa *algebraica absolutament diferent* i, per tant, no l'analtizarem.⁵³

52. [Pla:2010], capítol 3, §2, p. 93-105. [Pla:2016], §3.4.5 i §3.4.7, p. 234-236, i 238-248.

53. Si ho voleu fer, vegeu [Pla:2016], §3.4.5 i §3.4.7 ítem 4, p. 234-236 i 244-249. És d'un interès notable el text d'Aristòtil, §A.6.13.2c₁, [Pla:2016], p. 434-435.

2.4. Generalitzem

És natural —i propi de la matemàtica— plantejar-se els problemes que sorgeixen per *generalització*.

En concret,

Problema. Amb regla i compàs, és possible:

- a) duplicar el cub?
- b) trisecar l'angle?

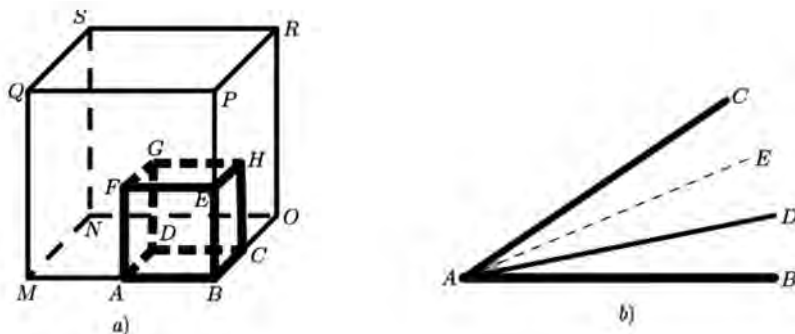


Figura 20. Duplicar el cub i trisecar l'angle.

És a dir,

- a) Donat un cub de vèrtexs diametralment oposats A i H (figura 20a), volem determinar el de vèrtexs diametralment oposats B i S de volum doble al del donat.
- b) Donat un angle $\widehat{BAC}$ (figura 20b), volem determinar els punts D o E de manera que la recta que passa pels punts A , i D o E determini els angles $\widehat{BAD}$ o $\widehat{BAE}$ iguals a una tercera part o a dues terceres part del donat.⁵⁴

Els geòmetres grecs van trobar moltes maneres de resoldre aquest problema —o bé inventant corbes que en ser tallades entre si, o amb un cercle, aconseguien el punt desitjat, o bé creant ginys geomètrics que ho fessin—, però no van trobar la manera de fer-ho amb regla i compàs.⁵⁵

La pregunta natural és:

- a) No eren prou hàbils?
- b) No es pot fer?

Estaven convençuts que **no** era possible fer-ho.⁵⁶

Però la demostració matemàtica precisa trigaria molts segles. Calia que s'hagués canviat de paradigma i que la geometria s'hagués algebratitzat gràcies a les aportacions dels matemàtics àrabs i dels del Renaixement italià.

54. Si podem trobar un *trisector* també podem trobar l'altre, ja que sabem dimidiar angles.

55. [Pla:2026] com a síntesi de la qüestió.

56. [Pla:2026], §4.1.2f, p. 89.

En síntesi, es necessitava l'aportació que l'insigne filòsof René Descartes (1596-1650) va fer en la *Geométrie*,⁵⁷ un dels tres apèndixs de *Le discours de la méthode* (1637).

Dos-cents anys més tard (1837), amb 23 anys, Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) responia la pregunta en un article de set pàgines en què establí:

*Els nombres reals construïbles amb regla i compàs són solucions d'un polinomi irreductible en una variable x i amb els coeficients racionals de grau amb una potència de 2.*⁵⁸

3. I apareixen Descartes i la seva *Geometria*

Una síntesi breu de l'epistemologia algebraica de la *geometria cartesiana*,⁵⁹ basada en l'àlgebra heretada dels àrabs i desenvolupada pels matemàtics italians del Renaixement i, en l'àlgebra sincopada i literal, és la següent:

3.1. Les operacions numèriques que provenen de l'ús del regla i el compàs de segments amb nom

La idea de Descartes és molt simple.

3.1.1. Els segments tenen nom

Consisteix a **donar nom** als segments rectilinis, és a dir, a atribuir-los el valor de la seva longitud, un cop fixat un *segment unitat*, tant si aquesta longitud és *racional* o *irracional*, *coneguda* o *desconeguda*.⁶⁰

Així, doncs, tenim un segment de «nom» 1 i aleshores assignem a cada segment un nombre $a, b, c, \dots, x, y, z$.⁶¹

3.1.2. Les operacions algebraiques de les construccions amb regla i compàs

La qüestió és: com podem traduir a l'àlgebra dels «noms» —dels nombres— allò que obtenim quan, en geometria, fem construccions amb regla i compàs?

57. El capítol primer de *La géométrie* de René Descartes és un text excel·lent i molt entenedor, i constitueix un bon text per començar a llegir originals matemàtics. En síntesi, conté el que es diu a §3.1.2 i, atès que diposem de $+$, $-$, $\cdot$, $\div$ i $\sqrt{\quad}$, es poden resoldre les equacions de primer grau i segon grau $X + a = 0$ i $Y^2 + bY + c = 0$, amb

regla i compàs, ja que $X = -a$ i $Y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2}$. A més, el text proporciona com cal fer-ho geomètricament [Pla i Viader:1999], capítol 1, p. •. Per a una descripció dels trencaments epistemològics de les aportacions geomètriques del filòsof francès en relació amb el pensament grec, [Pla:1987].

58. [Wantzel:1837], §III, p. 368.

59. Recordem que, de vegades, Descartes signava amb el nom llatinitzat *Cartesius*.

60. Els nombres racionals eren els únics que acceptaven els matemàtics grecs i constituïen la base de la seva aritmètica. Els irracionals, en no ser expressables com a parts al·líquotas de 1, no eren acceptats. Per a un geòmetra grec, la diagonal d'un quadrat de costat 1, si bé és construïble amb regla i compàs, té una longitud que **no** és *commensurable*. Per tant, no li podem assignar cap nombre. Podem veure les definicions 1, 2 i 3 del llibre VII, dels *Elements* d'Euclides. [Pla:2020], p. 87-88.

61. Descartes proposa les primeres lletres $-a, b, c, \dots$ —per als valors que suposem donats i les darreres $-x, y, z$ — per als valors desconeguts que busquem.

3.1.2a. La suma i la resta. És clar que donats dos segments a i b , podem construir un segment de nom $a + b$ i un altre de nom $a - b$ (§1.4.5a, pàgina 82).

3.1.2b. La multiplicació i la divisió. Donats els noms $1, a$ i b , podem determinar el nom dels segments quarta proporcional d'ells. Si busquem x i y de manera que $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$ i $\frac{y}{a} = \frac{b}{1}$, tenim que $x = \frac{a}{b}$ i que $y = a \cdot b$.

3.1.2c. L'arrel quadrada. Donats 1 i a , s'obté geomètricament buscant la mitjana proporcional dels segments de longitud 1 i a . En efecte, si z designa aquesta mitjana, $z^2 = a$ i, de retop, $z = \sqrt{a}$.

4. Cloenda

Si bé, com dèiem, l'eina algebraica ens permet demostrar rigorosament la impossibilitat de resoldre els dos problemes clàssics amb R i C , hi ha un mètode geomètric, la *papiroflèxia* o *origami*, que permet resoldre'ls. Com hem indicat en la introducció, dedicarem un segon article a veure, a poc a poc com hem fet en aquestes pàgines, els passos que porten a aquestes solucions.⁶²

Bibliografia

- [1] **[Berggren:1986]** John Lennart Berggren (1986). *Episodes in the mathematics of Medieval Islam*. Nova York: Springer-Verlag.
- [2] **[Boyer:1949]** Carl B. (1949). *The concepts of the calculus, a critical and historical discussion of the derivative and the integral*. Hafner. [Reeditat l'any 1959 amb el títol *The history of the calculus and its conceptual development*. Nova York: Dover. En línia a https://download.tuxfamily.org/openmathdep/history/History_of_the_Calculus-Boyer.pdf].
- [3] **[Courant i Robbins:1941]** Richard Courant i Herbert Robbins (1941). *What is mathematics?*. Nova York: Oxford University Press. [Traducció castellana de L. Bravo, *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar (1955). En línia a [https://www.cimat.mx/gil/docencia/2017/mate_elem/\[Courant,Robbins\]What_Is_Mathematics\(2nd_edition_1996\)v2.pdf](https://www.cimat.mx/gil/docencia/2017/mate_elem/[Courant,Robbins]What_Is_Mathematics(2nd_edition_1996)v2.pdf)].
- [4] **[Dörrie:1932]** Heinrich Dörrie (1933). *Triumph der Mathematik*. Breslau: Ferdinand Hirt. [Traducció anglesa de D. Antin, *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their history and solution*. Nova York: Dover, 1958].
- [5] **[Gauss:1801]** Carl Friedrich Gauss (1801). *Disquisitiones arithmeticae*. Leipzig: Gerh. Fliescher. [Traducció i pròleg de G. Pascual i Xufré, *Disquisicions aritmètiques* Barcelona, Societat Catalana de Matemàtiques (1996)].
- [6] **[Martin:1998]** George E. Martin *Geometric constructions*. Nova York: Springer-Verlag.
- [7] **[M7 MacTutor:1994-2023]** Al'adreça <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/> s'indexen alfabèticament les biografies dels matemàtics aplegades a «MacTutor History of Mathematics», un índex creat l'any 1994 i mantingut al dia per Edmund Robertson i John O'Connor de la *School of Mathematics and Statistics*, i gestionat per la Universitat. Normalment, el primer ítem de les *References* de cada personatge enllaça amb la biogra-

62. Acabat a Tamariu, el 21 de juliol de 2024.

fia corresponent del *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990), editat per Charles C. Gillispie. En aquest cas, les biografies són obra d'especialistes diversos.

- [8] **[Pla:2016]** Josep Pla Carrera (2016). *Història de la matemàtica grega: Grècia I (de Tales i Pitàgores a Plató i Aristòtil)*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- [9] **[Pla:2018]** — (2018). *Història de la matemàtica grega: Grècia IIa els Elements d'Euclides: Llibres I, II, III, IV, V i VI*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- [10] **[Pla:2020]** — (2020) *Història de la matemàtica grega: Grècia IIa els Elements d'Euclides: Llibres VII, VIII, IX, X, XI i XII*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- [11] **[Pla:2026]** — (2026) *Història de la matemàtica grega: Grècia IIIb. Altres obres d'Apol·loni, Conó i Dositeu, Nicomedes i Eratòstenes, Dionísodor, Diocles i Els miralls ustoris*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans (pendent de publicació).
- [12] **[Pla i Viader:1999]** Josep Pla Carrera i Pelegrí Viader Canals (1999). *René Descartes. La geometria*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- [13] **[Wantzel:1837]** Pierre-Laurent Wantzel «Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1 (2), 1837, p. 366–372. [En línia a <http://visualiseur.bnf.fr/ConsulterElementNum?O=NUMM-16381&Deb=374&Fin=380&E=PDF>].

.....